Volume d'un Parallélépipède

Nicolas RAPIN

November 18, 2016

Voici une nouvelle illustration de la magie du principe de linéarité qui permet, comme le préconisait Descartes, de réduire tout problème à des problèmes plus petits, et ce jusqu'à tomber sur des évidences.

On se place dans l'espace géométrique à 3 dimensions que l'on suppose muni d'un repère orthonormé d'origine O et de base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs quelconques de cet espace. On dira qu'un point P de cet espace appartient au volume noté $V_{(\vec{u},\vec{v},\vec{w})}$ engendré par ces vecteurs si et seulement si le vecteur $\vec{OP}$ est égal à $x.\vec{u} + y.\vec{v} + z.\vec{w}$ où x, y, z sont trois réels appartenant à l'intervalle $[0, 1]$.

1 Problème

Trouver l'expression de ce volume en fonction des coordonnées des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et en n'utilisant que les fonctions $+, -$ (somme, soustraction), $*$ (multiplication) et $|.|$ (valeur absolue).

2 Piste

1. Montrer que les fonctions binaires *produit scalaire* et *produit vectoriel* sont linéaires (bi-linéaires)
2. Déduire de cette linéarité que ces fonctions sont exprimables par les coordonnées des vecteurs arguments
3. Montrer que le volume s'exprime grâce au *produit scalaire* et au *produit vectoriel*
4. Conclure
5. Remarquer que ce volume est nul si deux vecteurs sont co-linéaires
6. Remarquer que le volume et le déterminant ne font qu'un au signe près

3 Solution

En notant . le produit scalaire et $\wedge$ le produit vectoriel le volume V engendré par $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vaut:

$$|\vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w})|$$

En effet $\vec{v} \wedge \vec{w}$ est un vecteur orthogonal au plan défini par $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dont la norme est la surface engendrée par $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Le volume est donc $h * \parallel (\vec{v} \wedge \vec{w}) \parallel$ où h est la norme de la projection de u sur $(\vec{v} \wedge \vec{w})$. Soit en fait $|\vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w})|$.

Pour avoir V en fonction des coordonnées ... Les produits vectoriels et scalaires sont bilinéaires. En exprimant tout vecteur $\vec{u}$ comme la somme $x_u.\vec{i} + y_u.\vec{j} + z_u.\vec{k}$ on peut alors ramener le produits de deux vecteurs à des produits élémentaires $\vec{e}_1.\vec{e}_2$ et $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$ avec $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Sachant que:

$\vec{e}_i.\vec{e}_i = 1$ et $\vec{e}_i.\vec{e}_j = 0$ pour $i \neq j$

$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$, etc

on va obtenir l'expression demandée.

On suppose que Lagrange a du procéder ainsi pour calculer ce volume.